Спектральный анализ электрических сигналов

Луговцов Глеб
ФЭФМ МФТИ
lugovtsov.gs@phystech.edu

Аннотация

В работе изучается спектральный состав периодических электрических сигналов различной формы: цугов, прямоугольных импульсов и модулированных по амплитуде сигналов; спектры этих сигналов наблюдаются на цифровом анализаторе спектра и сравниваются с рассчитанными теоретическими значениями.

1 Введение

В последнее время повсеместное распространение получила цифровая обработка сигналов. Спектральный состав оцифрованного сигнала может быть найден с помощью компьютера и численных методов. Этим принципом мы и будем пользоваться в своей работе.

2 Теоретическая справка

Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Используется разложение в сумму синусов и косинусов с различными аргументами или, как чаще его называют, *разложение в ряд Фурье*.

Пусть задана функция $f(t)$, которая периодически повторяется с циклической частотой $\Omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n\Omega_1 t\right) + b_n \sin\left(n\Omega_1 t\right)\right] \tag{1}$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\Omega_1 t - \psi_n\right). \tag{2}$$

Если сигнал чётен относительно $t = 0$, в тригонометрической записи остаются только члены с косинусами. Для нечетной наоборот.

Коэффициенты определяются по формуле

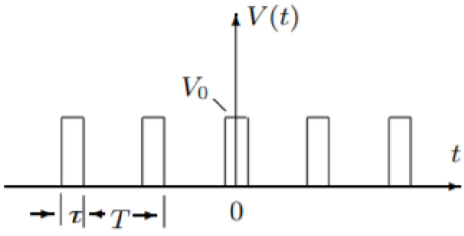
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos\left(n\Omega_1 t\right) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int\limits_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin\left(n\Omega_1 t\right) dt. \end{aligned} \tag{3}$$

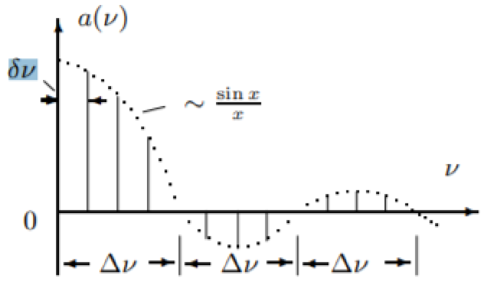
Здесь t_1 — время, с которого мы начинаем отсчет.

Сравнив формулы (1) и (2) можно получить выражения для A_n и ψ_n:

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \\ \psi_n &= \arctan\frac{b_n}{a_n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Периодическая последовательность прямоугольных импульсов





Напомним, что $\Omega_1 = \dfrac{2\pi}{T}$, где T — период повторения импульсов.

Коэффициенты при косинусных составляющих будут равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t)\, dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1\tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}. \tag{5}$$

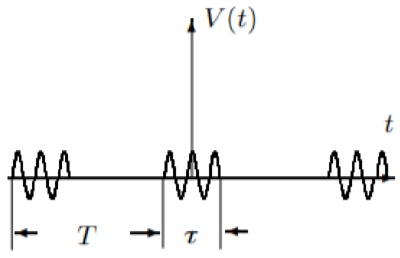
Здесь V_0 - амплитуда сигнала.

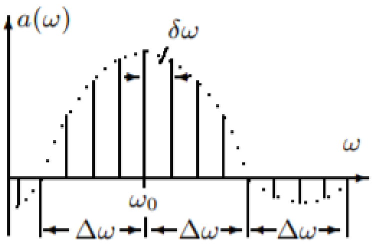
Поскольку наша функция четная, то $b_n = 0$.

Пусть T кратно τ. Тогда введем ширину спектра, равную $\Delta\omega$ — расстояние от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающего, как нетрудно убедиться при $n = \dfrac{2\pi}{\tau\Omega_1}$. При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1. \tag{6}$$

Периодическая последовательность цугов





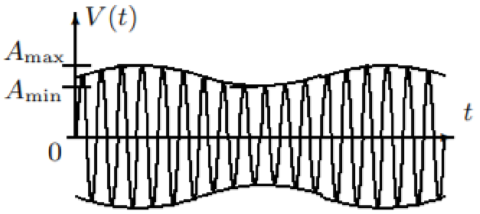
Возьмём цуги колебания $V_0\cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторений T.

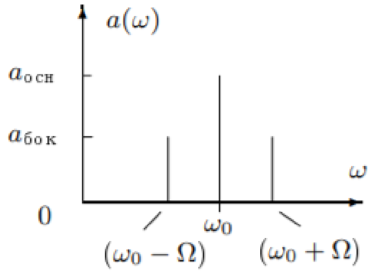
Функция $f(t)$ снова является четной относительно $t = 0$. Коэффициент при n-ой гармонике согласно формуле (3) равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t)\, dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin\left[(\omega_0 - n\Omega_1)\,\frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\,\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin\left[(\omega_0 + n\Omega_1)\,\frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\,\frac{\tau}{2}} \right). \tag{7}$$

Пусть T кратно τ. Тогда спектры последовательности прямоугильных сигналов и цугов аналогичны, но максимумы сдвинуты на ω_0.

Амплитудно-модулированные колебания





Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты ω_0, амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$.

$$f(t) = A_0\left[1 + m\cos\Omega t\right]\cos\omega_0 t. \tag{8}$$

Коэффициент m называется *глубиной модуляции*. При $m < 1$ амплитуда меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1-m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1+m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}. \tag{9}$$

Простым тригонометрическим преобразованием уравнения (8) можно найти спектр колебаний

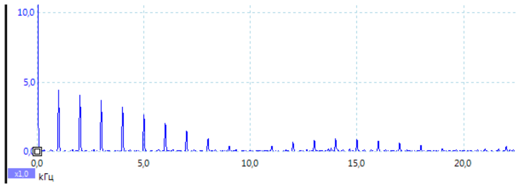
$$f(t) = A_0\cos\omega_0 t + \frac{A_0 m}{2}\cos\left(\omega_0 + \Omega\right)t + \frac{A_0 m}{2}\cos\left(\omega_0 - \Omega\right)t. \tag{10}$$

3 Ход работы

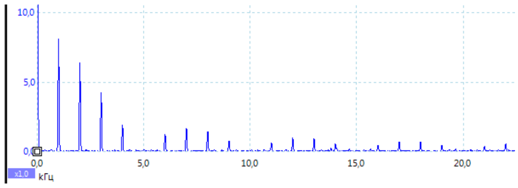
Исследование спектра периодических последовательностей прямоугольных импульсов

Устанавливаем прямоугольные колебания с $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц (период $T = 1$ мс) и длительностью импульса $\tau = 100$ мкс.

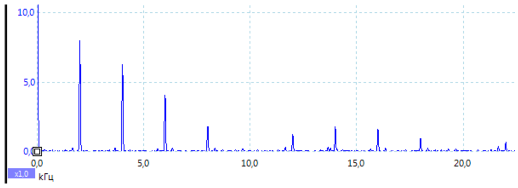
Получаем на экране спектр сигнала и, изменяя либо τ, либо $\nu_{\text{повт}}$, наблюдаем, как изменяется спектр.



$\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 100$ мкс



$\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 200$ мкс

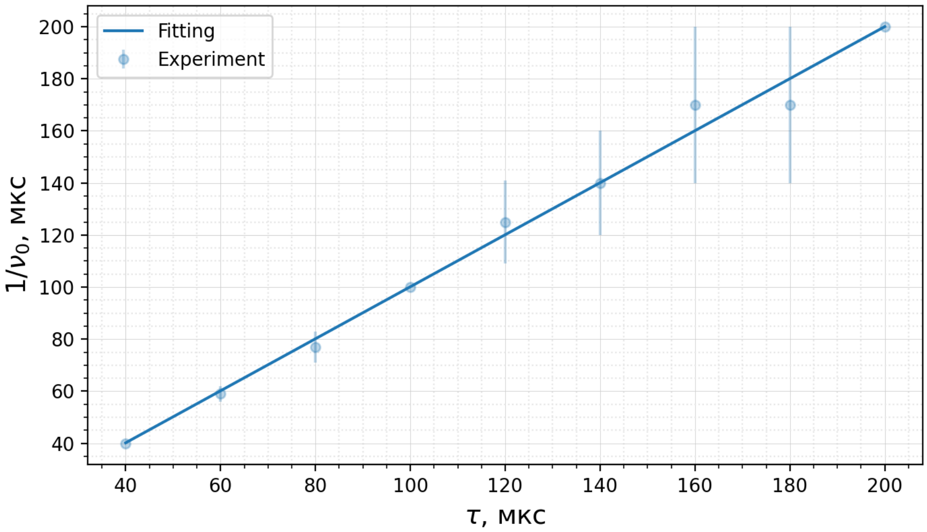


$\nu_{\text{повт}} = 2$ кГц, $\tau = 100$ мкс

Из данных видно, что, при увеличении τ, уменьшается $\Delta\nu$, а при увеличении $\nu_{\text{повт}}$, увеличивается расстояние между пиками.

Измерим зависимость $\Delta\nu$ от τ:

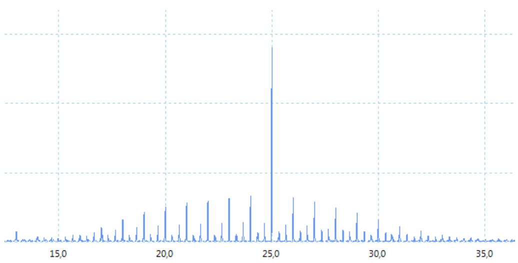
τ, мкс	ν_0, кГц	$\Delta\nu_0$, кГц	$1/\nu_0$, мкс	$\Delta 1/\nu_0$, мкс
40.0	30	30	40.0	0
60.0	17	17	59	3
80.0	13	13	77	6
100.0	10	10	100.0	0
120.0	8	8	125	16
140.0	7	7	140	20
160.0	6	6	170	30
180.0	6	6	170	30
200.0	5	5	200.0	0



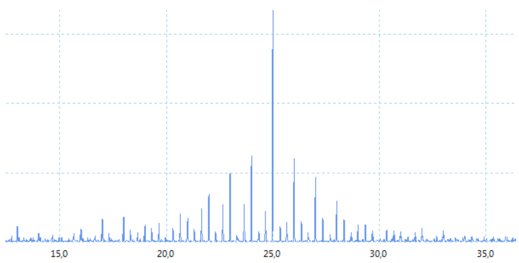
Из графика $\Delta\nu \cdot \tau = 1.004 \pm 0.014$, что подтверждает соотношение неопределенностей.

Исследование спектра периодической последовательности цугов

Посмотрим на последовательность цугов с характерными параметрами: $\nu_0 = 50$ кГц частота повторения импульсов $f_{\text{повт}} = 1$ кГц и исследуем спектр этого сигнала для разных длительностей импульса:



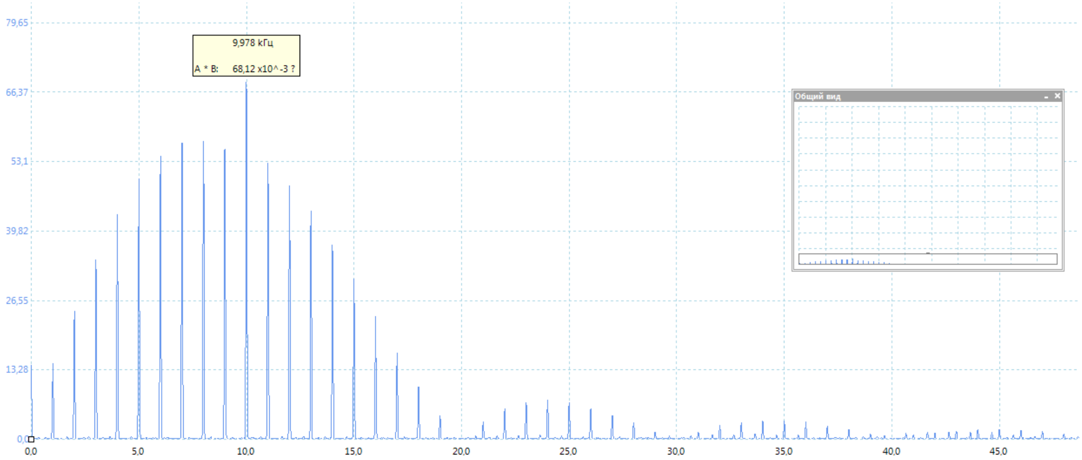
$\tau = 100$ мкс



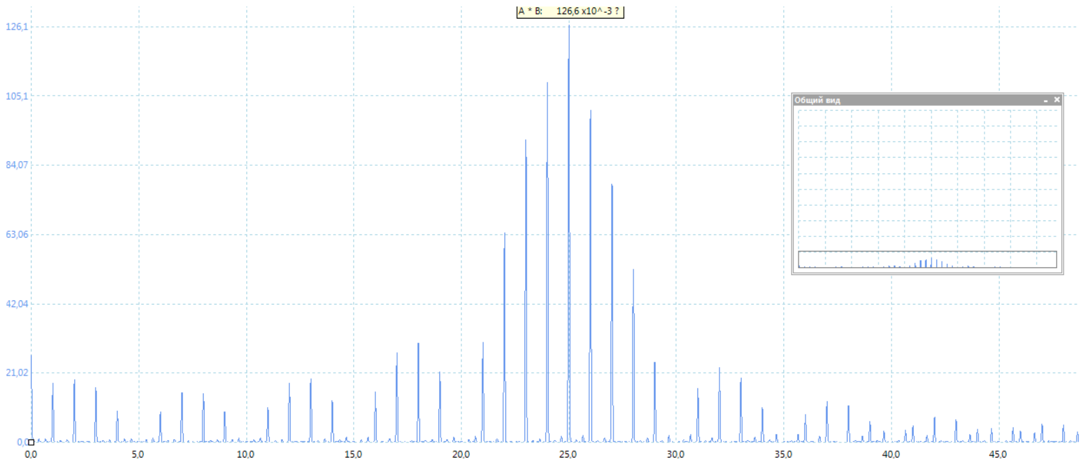
$\tau = 200$ мкс

Из данных видно, что при изменении τ значение $\Delta\omega$ обратнопропорционально меняется.

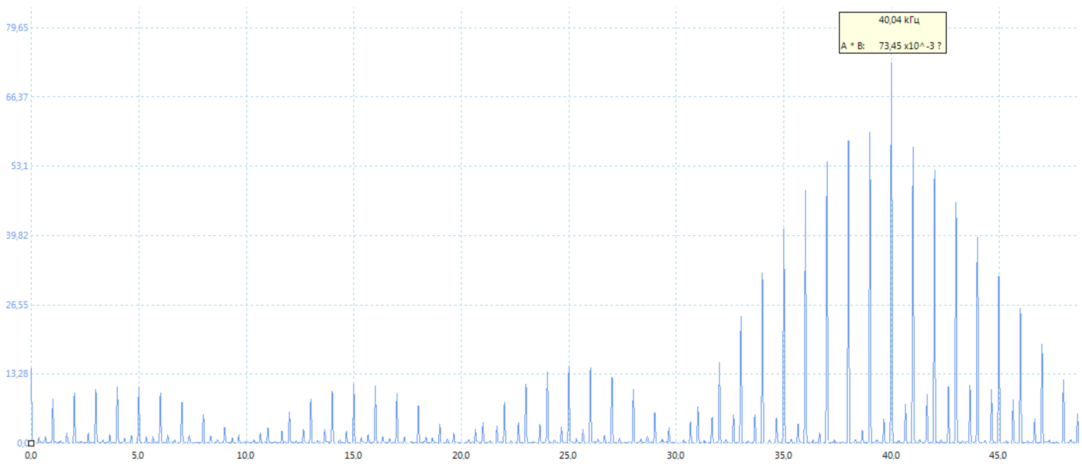
Рассмотрим поведение спектрограммы при фиксировнном значении τ и меняющемся значении ν_0:



$\nu_0 = 10$ кГц



$\nu_0 = 25$ кГц



$\nu_0 = 40$ кГц

Из данных видно, что при изменении ν_0 картина смещается без изменения расстояния между спектральными компонентами.
Рассмотрим то, как это расстояние меняется при изменении $f_{\text{повт}}$:

$f_{\text{повт}}$	ν, кГц
0.5	0.5
1.0	1.0
2.0	2.0
4.0	4.0
5.0	5.0

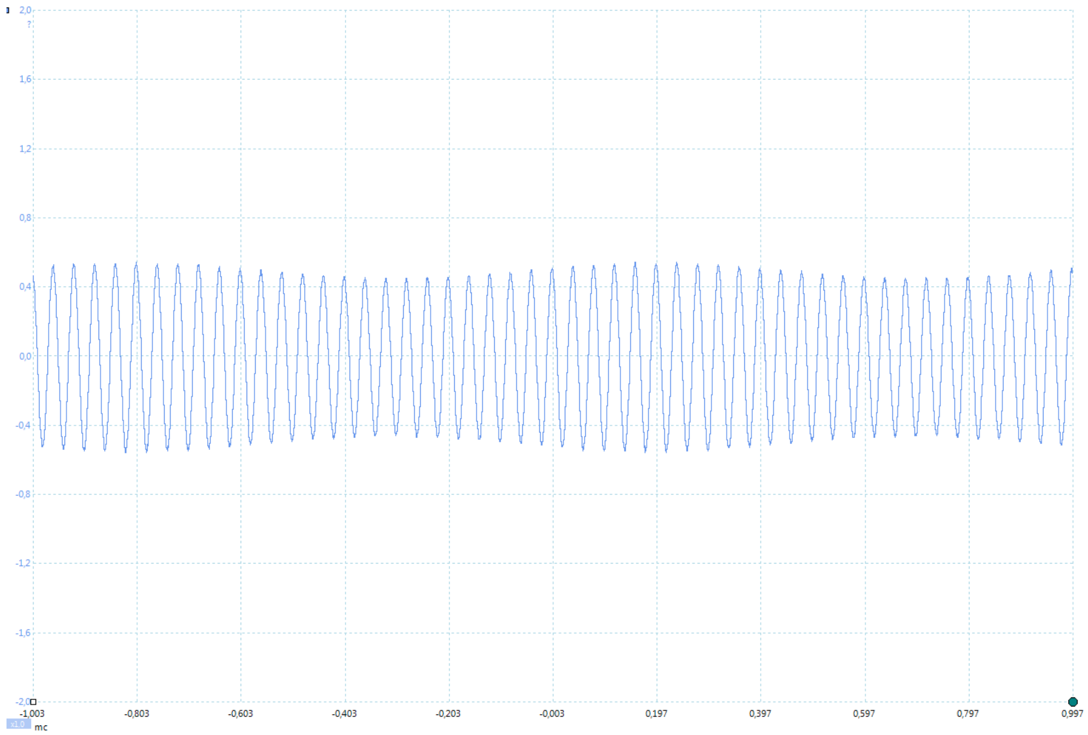
Погрешность результатов определяется погрешностью генератора – 0.5 Гц.

$$\frac{f_{\text{повт}}}{\nu, \text{кГц}} = 1 \pm 0.1\%,$$

что согласуется с теорией.

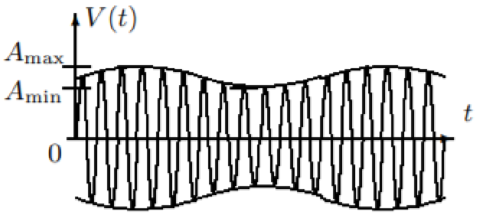
Исследование спектра амплитудно модулированного сигнала

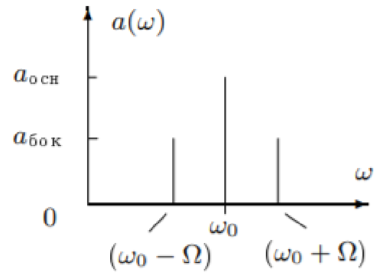
Рассмотрим амплитудно промодулированную синусоиду с параметрами $\nu_0 = 25$кГц, $\nu_{\text{мод}} = 1$кГц:



$\nu_0 = 40$ кГц

Посмотрим на спектрограмму этого сигнала:
<тут должен быть скрин со спектрограммой, но у меня его нет>

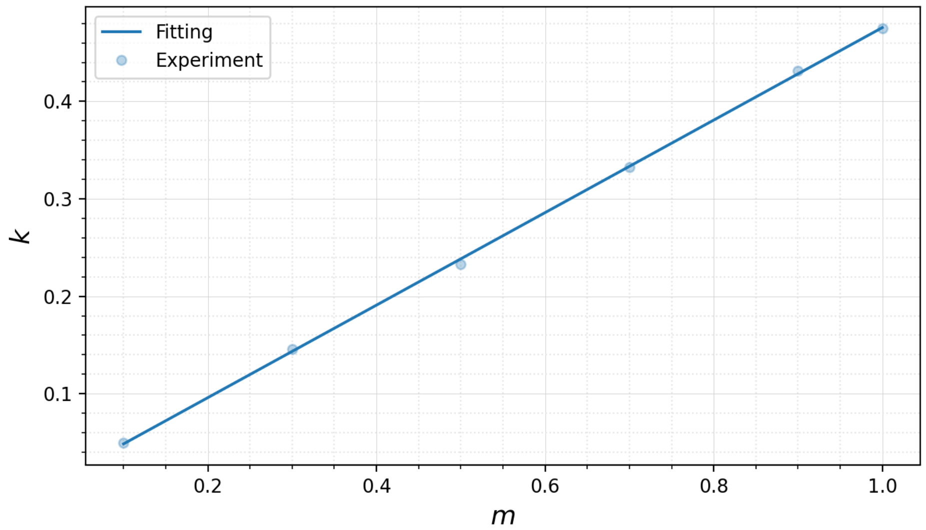




Посмотрим зависимость отношения амплитуд $k = A_{\text{бок}}/A_{\text{осн}}$ у боковых и остовной частоты от параметра $m = (A_{max} - A_{min})/(A_{max} + A_{min})$.

$A_{max} - A_{min}$, В	$A_{\text{бок}}$, В	m	k
0.2	0.0160	0.1	0.0497
0.6	0.0470	0.3	0.1460
1.0	0.0750	0.5	0.2329
1.4	0.1070	0.7	0.3323
1.8	0.1390	0.9	0.4317
2.0	0.1530	1.0	0.4752

$$A_{\text{осн}} = (322 \pm 0.5)\text{мВ},\ \Delta A_{\text{бок}} = 0.0005\,\text{В}, \Delta k = 0.0016$$



Из графика

$$\frac{k}{m} = 0.476 \pm 0.015,$$

что сходится с теоретическим значением 0.5.

4 Выводы

В данной работе мы изучили понятие спектра и спектрального анализа, а также исследовали спектральный состав периодических электрических сигналов.

А именно, мы посмотрели на прямоугольные импульсы, цуги гармонических колебаний, а также гармонические сигналы, модулированные по амплитуде. Кроме того, нами был экспериментально проверен частный случай выполнения соотношения неопределённости.