

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 3.5.1

# Спектральный анализ электрических сигналов

выполнила студентка группы Б04-108

Брюквина Дарья

Долгопрудный, 2022 г.

# 1 Аннотация

В данной работе исследовался спектральный состав электрических сигналов. Для этого генератором электрических сигналов создавались произвольные сигналы, а также электрические цепи, затем с помощью электронного осциллографа анализировалось разложение в ряд Фурье. Целью данной работы являлись выводы и характере поведения спектров сигналов при изменении основных определяющих величин, таких как частота, амплитуда и т.п.

## 2 Введение

Известно, что одной из основным проблем современного мира является передача, хранение и анализ электрических и электромагнитных сигналов. Для этих целей используется математический ряд функций, используемый для описания поведения сигнала. Такой ряд, состоящий из функций  $\sin$  и  $\cos$ , взятых с разными коэффициентами, называется рядом Фурье. Данная работа посвящена анализу разложения в ряд Фурье сгенерированного сигнала, а также поиску возможных зависимостей между основными характеристиками сигнала, такими как частота, амплитуда и пр.

## 3 Методика

Для анализа сигналов рассмотрим модельную ситуацию.

Пусть задана функция  $f(t)$ , которая повторяется периодически с частотой  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  - период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n). \quad (2)$$

Если разлагаемый сигнал чётен относительно  $t = 0$ , то в тригонометрической записи остаются только члены, соответствующие функциям косинусов. Для нечетного сигнала в тригонометрической записи остаются только члены, соответствующие синусу.

Коэффициенты ряда Фурье определяются по следующей формуле:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

где  $t_1$  - время начала отсчета.

Из сравнения формул (1) и (2) следуют выражение для  $A_n$  и  $\psi_n$ :

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \\ \psi_n &= \arctan \frac{b_n}{a_n}. \end{aligned} \quad (4)$$

Теперь рассмотрим последовательность прямоугольных сигналов.

Введем величину:  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  - период повторения импульсов.

Тогда коэффициенты при составляющих, соответствующих косинусам, будут равны:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}, \quad (5)$$

где  $V_0$  - амплитуда сигнала.

Так как взятая нами функция четна, следовательно  $b_n = 0$ .

Предположим, что  $T$  кратно  $\tau$ . Введем ширину спектра, равную  $\Delta\omega$ , т.е. расстояние от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающего при  $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$ .

Заметим, что при этом выполняется следующее равенство:

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1, \quad (6)$$

проверяемое в процессе исследования.

Рассмотрим периодическую последовательность цугов. Пусть  $V_0 \cos(\omega_0 t)$  колебания цугов с длительностью цуга  $\tau$  и периодом повторений  $T$ .

Функция  $f(t)$  является четной относительно  $t = 0$ , а коэффициент при  $n$ -ой гармонике согласно формуле (3) равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left( \frac{\sin\left[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin\left[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right), \quad (7)$$

Предположим, что  $T$  кратно  $\tau$ . Тогда спектры последовательности прямоугольных сигналов и цугов аналогичны с точностью до сдвига максимума на  $\omega_0$

Рассмотрим последний исследуемый в работе объект - амплитудно-модулированные сигналы.

Пусть есть гармонические колебания высокой частоты  $\omega_0$ , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой  $\Omega \ll \omega_0$ :

$$f(t) = A_0 [1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t, \quad (8)$$

где коэффициент  $m$  - глубина модуляции. При  $m < 1$  амплитуда меняется в диапазоне от  $A_{min} = A_0(1 - m)$  до  $A_{max} = A_0(1 + m)$ .

Параметр глубина модуляции может быть представлена в виде:

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}, \quad (9)$$

откуда тригонометрическим преобразованием находится спектр сигнала:

$$f(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega) t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega) t. \quad (10)$$

Для проверки соотношений и равенств, приведенных выше в данной работе, использовался генератор электрических сигналов, подсоединенный непосредственно к осциллографу.

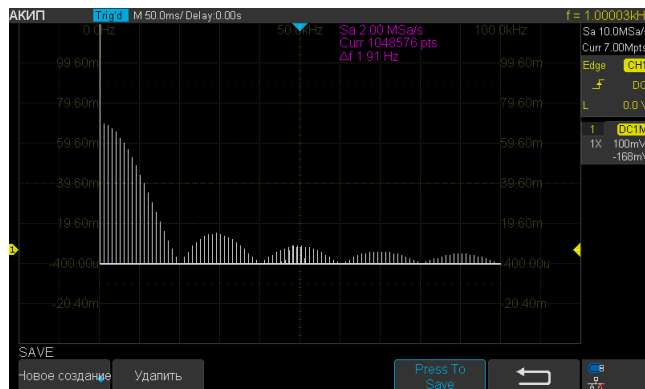
Разложение сигналов в ряд Фурье, а также расчет расстояний, длин и промежутков времени, проводилось в автоматическом режиме с помощью встроенных в осциллограф функций.

## 4 Результаты и их обсуждения

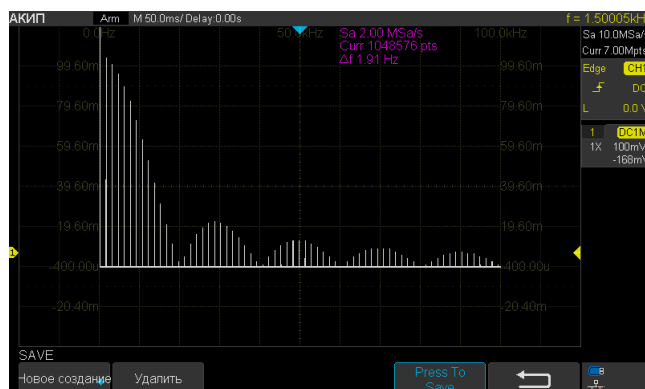
Для подтверждения равенства  $\Delta\nu\tau \approx 1$ , для периодической последовательности прямоугольных сигналов были построены спектры при различных значениях частоты повторения сигнала  $\nu_{пов}$  и времени периода одного сигнала. На основе спектров было получено усредненное произведение

$$\Delta\nu\tau \approx 1.00 \pm 0.02$$

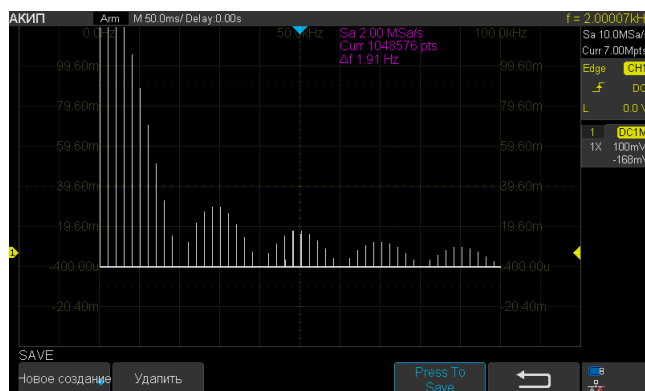
, что с высокой точностью подтвердило теоретический вывод.



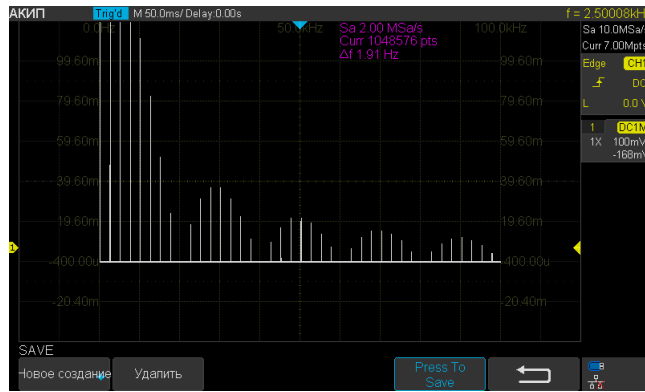
Спектр периодической последовательности импульсов с характеристиками:  $\nu_{повт} = 1.5$  кГц,  
 $\tau = 50$  мкс.



Спектр периодической последовательности импульсов с характеристиками:  $\nu_{повт} = 1.5$  кГц,  
 $\tau = 50$  мкс.



Спектр периодической последовательности импульсов с характеристиками:  $\nu_{повт} = 2$  кГц,  
 $\tau = 50$  мкс.



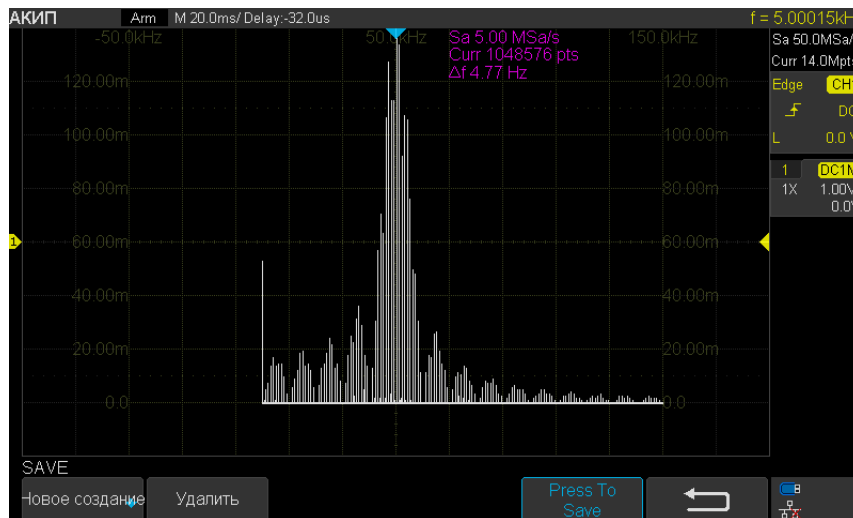
Спектр периодической последовательности импульсов с характеристиками:  $\nu_{повт} = 2.5 \text{ кГц}$ ,  
 $\tau = 50 \text{ мкс}$ .

Следующим исследованным объектом был спектр периодической последовательности цугов, для которого был построен спектр и было проанализировано расстояние между спектральными компонентами. При различных параметрах частоты цуга и частоты колебания была обнаружена зависимость

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 1,5 \pm 0,3$$

которая выполнялась с высокой точностью вблизи значений  $\nu = 50 \text{ КГц}$  и  $T = 10^{-3} \text{ сек}$ , где  $T$  – период колебаний цугов, а  $\Delta\nu = 50 \text{ КГц}$  – частота одного цуга.

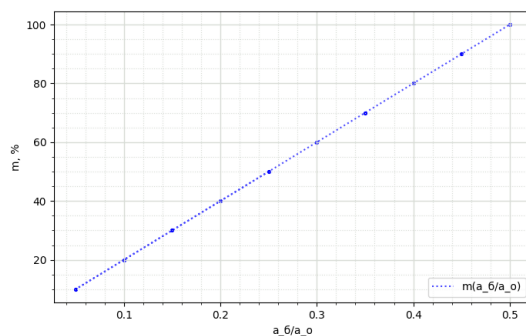
Полученное равенство так же подтверждается теоретическими выкладками.



Пример исследуемого спектра синусоидального цуга при  $\nu = 50 \text{ КГц}$  и  $T = 10^{-3} \text{ сек}$

Для спектра амплитудно-модулируемого сигнала исследовались боковые и фронтные амплитуды линий спектров в зависимости от глубины модуляции. При постоянных параметрах  $\nu = 50 \text{ кГц}$  и  $\nu_{mod} = 2 \text{ кГц}$  была получена зависимость отношение  $a_{бок}/a_{осн}$  амплитуд боковой и основной линий спектра в зависимости от  $m$ .

С достаточно высокой точностью было получено равенство боковых амплитуд для различных параметров сигнала. Сама зависимость оказалась линейной с угловым коэффициентом 2, т.е.  $a_{бок}/a_{осн} \cdot 2 \approx m$ , что также соответствует теоретическим выводам, представленным выше.



*График зависимости глубины модуляции сигнала  $m$  от отношения боковой к центральной амплитуд  $a_b/a_c$*

## 5 Выводы

В результате настоящей работы исследованы спектры различных электрических сигналов, используя разложение в ряд Фурье. Была экспериментально подтверждена линейная зависимость отношения амплитуд (боковой и центральной) от глубины модуляции для амплитудно-модулируемого сигнала с коэффициентом 2. Также было подтверждено равенство  $\Delta\nu\tau \approx 1$ , что также было выведено теоретически. Таким образом, экспериментально были обоснованы теоретические расчеты для различных типов сигналов и комбинаций сигналов.