

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 3.5.1

Спектральный анализ электрических сигналов

выполнила студентка группы Б04-108

Брюквина Дарья

Долгопрудный, 2022 г.

1 Аннотация

В работе исследован спектральный состав сигналов заданной формы. С помощью метода Фурье-анализа исследованы конкретные характеристики сигналов с использованием осциллографа и генератора электрических сигналов. Была построена теоретическая модель, которая была подтверждена экспериментально.

2 Введение

Известно, что задача описания поведения некоторой системы сводится к анализу поведения сигнала на входе и на выходе данной системы. Для описания сигнала часто используется математический метод, основанный на Фурье-анализе, т.е. разложении сигнала в сумму ряда периодических функций. Данный метод широко используется в системах связи, океанологии, географии, численном анализе и многих других областях. Поэтому необходимо знать, насколько теоретическая модель Фурье анализа соответствует реальным данным. Целью данной работы являлось изучение разложения произвольного электрического сигнала в ряд Фурье, а также экспериментальное подтверждение теоретически выведенных зависимостей между основными характеристиками сигнала.

3 Методика

В данной работе анализ получаемых электрических сигналов производился на основе следующих рассуждений:

3.1 Рассмотрение периодического электрического сигнала

Рассмотрим периодический электрический сигнал как функцию $f(t)$ с частотой $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, где T - период повторения импульсов. Её разложение в ряд Фурье имеет вид:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

или

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n), \quad (2)$$

где a_n , b_n и ψ_n - действительные константы. Если функция $f(t)$ является четной, то в формуле 1 коэффициенты $a_n = 0$ для любого n .

В общем случае, коэффициенты в формуле 1 определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt. \end{aligned} \quad (3)$$

где t_1 - время начала отсчета.

Сравнивая формулы (1) и (2) получим выражение для A_n и ψ_n :

$$\begin{aligned} A_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \\ \psi_n &= \arctan \frac{b_n}{a_n}. \end{aligned} \quad (4)$$

3.2 Рассмотрение последовательности прямоугольных электрических сигналов

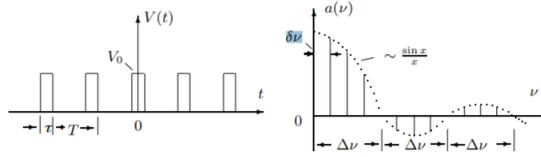


График прямоугольных электрических сигналов в осях $V(t)$ и $a(\nu)$ с соответствующими обозначениям величин.

Рассмотрим последовательность прямоугольных сигналов. Согласно формуле 3, коэффициенты Фурье анализа вычисляются так:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin x}{x}, \quad (5)$$

где V_0 - амплитуда сигнала.

Предполагая, что взятая нами функция четна, получим $b_n = 0$.

Введем ширину спектра, равную $\Delta\omega$, т.е. расстояние от главного максимума до первого нуля огибающей, возникающего при $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$.

Заметим, что при этом выполняется следующее равенство:

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi \Rightarrow \Delta\nu\Delta t \simeq 1. \quad (6)$$

Данное равенство проверялось в процессе эксперимента.

3.3 Рассмотрение периодической последовательности цугов

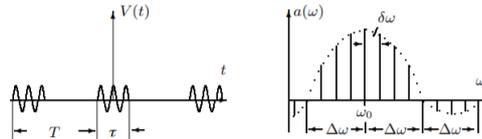


График периодической последовательности цугов в осях $V(t)$ и $a(\omega)$ с соответствующими обозначениям величин.

Рассмотрим периодическую последовательность цугов. Пусть $V_0 \cos(\omega_0 t)$ колебания цугов с длительностью цуга τ и периодом повторений T .

Считая функцию $f(t)$ четной, коэффициент при n -ой гармонике согласно формуле (3) найдем по формуле

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin\left[(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 - n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} + \frac{\sin\left[(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}\right]}{(\omega_0 + n\Omega_1) \frac{\tau}{2}} \right), \quad (7)$$

Спектры последовательности прямоугольных сигналов и цугов аналогичны с точностью до сдвига максимума на ω_0

3.4 Рассмотрение амплитудно-модулируемых сигналов

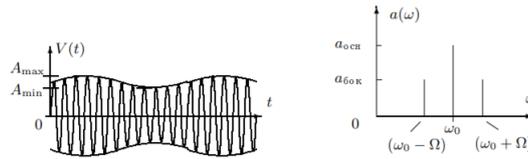


График амплитудно-модулируемых сигналов в осях $V(t)$ и $a(\omega)$ с соответствующими обозначениями величин.

Рассмотрим последний исследуемый в работе объект - амплитудно-модулированные сигналы.

Пусть есть гармонические колебания высокой частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой $\Omega \ll \omega_0$:

$$f(t) = A_0 [1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t, \quad (8)$$

где коэффициент m - глубина модуляции. При $m < 1$ амплитуда меняется в диапазоне от $A_{min} = A_0(1 - m)$ до $A_{max} = A_0(1 + m)$.

Параметр глубина модуляции может быть представлена в виде:

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}, \quad (9)$$

откуда тригонометрическим преобразованием находится спектр сигнала:

$$f(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 + \Omega) t + \frac{A_0 m}{2} \cos (\omega_0 - \Omega) t. \quad (10)$$

Для проверки соотношений и равенств, приведенных выше в данной работе, использовался генератор электрических сигналов, подсоединенный непосредственно к осциллографу (см. Рисунок 4).

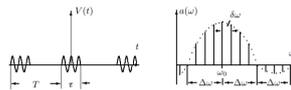


Схема используемой установки. Цифрой 1 обозначен USB-осциллограф АКПП-4107, цифрой 2 - функциональный генератор WaveStation 2012

Разложение сигналов в ряд Фурье, а также расчет расстояний, длин и промежутков времени, проводилось в автоматическом режиме с помощью встроенных в осциллограф функций.

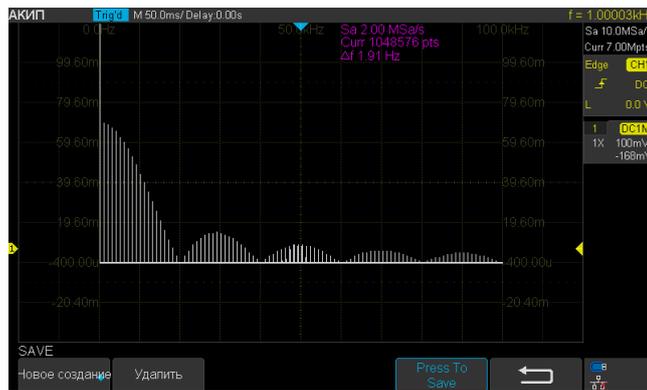
4 Результаты и их обсуждения

Для подтверждения равенства $\Delta \nu \tau \approx 1$, для периодической последовательности прямоугольных сигналов были построены спектры при различных значениях частоты повторения сигнала $\nu_{пов}$ и времени периода одного сигнала τ .

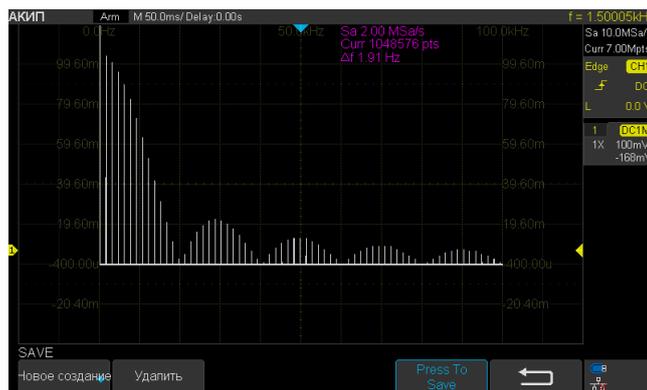
На основе спектров было получено усредненное произведение

$$\Delta \nu \tau \approx 1.00 \pm 0.02$$

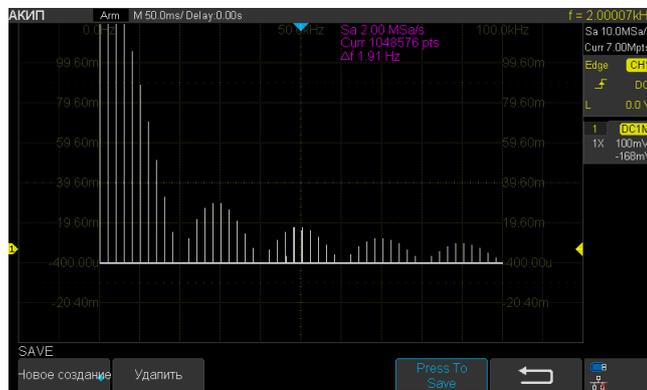
, что с высокой точностью подтвердило теоретический вывод.



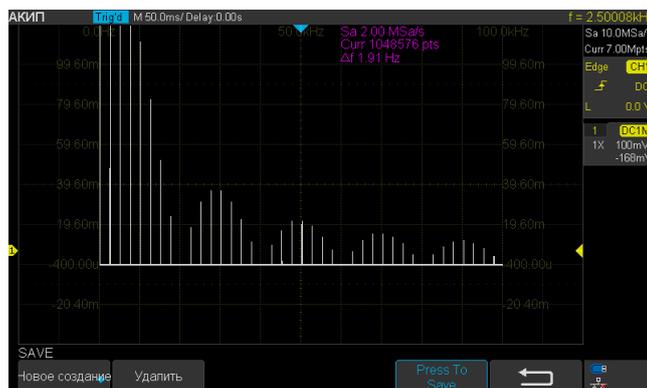
Спектр периодической последовательности импульсов с характеристиками: $\nu_{\text{повт}} = 1$ кГц, $\tau = 50$ мкс.



Спектр периодической последовательности импульсов с характеристиками: $\nu_{\text{повт}} = 1.5$ кГц, $\tau = 50$ мкс.



Спектр периодической последовательности импульсов с характеристиками: $\nu_{\text{повт}} = 2$ кГц, $\tau = 50$ мкс.



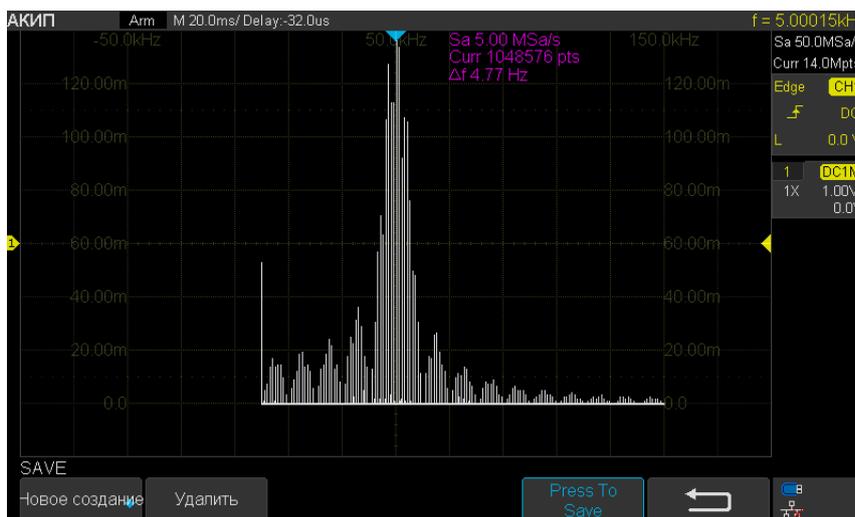
Спектр периодической последовательности импульсов с характеристиками: $\nu_{\text{повт}} = 2.5$ кГц, $\tau = 50$ мкс.

Следующим исследованным объектом был спектр периодической последовательности цугов, для которого был построен спектр и было проанализировано расстояние между спектральными компонентами. При различных параметрах частоты цуга и частоты колебания была обнаружена зависимость

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = 1,5 \pm 0,3$$

которая выполнялась с высокой точностью вблизи значений $\nu = 50\text{КГц}$ и $T = 10^{-3}\text{сек}$, где T – период колебаний цугов, а $\Delta\nu = 50\text{КГц}$ – частота одного цуга.

Полученное равенство так же подтверждается теоретическими выкладками.



Пример исследуемого спектра синусоидального цуга при $\nu = 50\text{КГц}$ и $T = 10^{-3}\text{сек}$

Для спектра амплитудно-модулируемого сигнала исследовались боковые и фронтные амплитуды линий спектров в зависимости от глубины модуляции. При постоянных параметрах $\nu = 50\text{кГц}$ и $\nu_{mod} = 2\text{кГц}$ была получена зависимость отношение $a_{бок}/a_{осн}$ амплитуд боковой и основной линий спектра в зависимости от m .

С достаточно высокой точностью было получено равенство боковых амплитуд для различных параметров сигнала. Сама зависимость оказалась линейной с угловым коэффициентом 2, т.е. $a_{бок}/a_{осн} \cdot 2 \approx m$, что также соответствует теоретическим выводам, представленным выше.

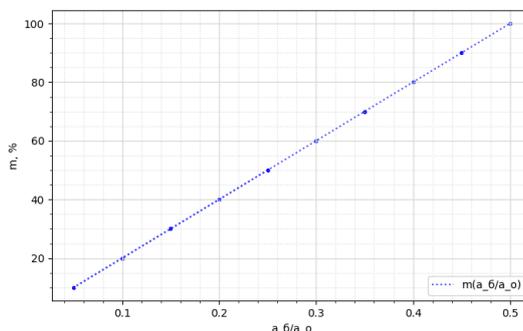


График зависимости глубины модуляции сигнала m от отношения боковой к центральной амплитуд a_b/a_c

5 Выводы

В результате настоящей работы исследованы спектры различных электрических сигналов, используя разложение в ряд Фурье. Была экспериментально подтверждена линейная зависи-

мость отношения амплитуд (боковой и центральной) от глубины модуляции для амплитудно-модулируемого сигнала с коэффициентом 2. Также было подтверждено равенство $\Delta\nu\tau \approx 1$, что также было выведено теоретически. Таким образом, экспериментально были обоснованы теоретические расчеты для различных типов сигналов и комбинаций сигналов.